Valószínűségszámítás II.

Visszatevés nélküli mintavétel

1. feladat

Egy biztosítótársaság felmérést készített. A véletlenszerűen kiválasztott 600 ügyfele közül 320-nak van életbiztosítása, 260-nak pedig lakásbiztosítása. 125 ügyfelük pedig mindkét biztosítással rendelkezik. Mekkora a valószínűsége, hogy a 600 kiválasztott ügyfél közül 1-et kiválasztva az ügyfélnek van,

a) lakásbiztosítása
b) egyik biztosítással sem rendelkezik
c) csak az egyik biztosítása van
d) a fenti két biztosítás közül legalább az egyikkel rendelkezik?

Megoldás:

125 ügyfélnek lakás- és életbiztosítás is van. Csak lakásbiztosítása van 260-125= 135, csak életbiztosítása van: 320-125= 195 ügyfélnek. A fenti két biztosítás egyikével sem rendelkezik: 600-135-125-195=145 ügyfél.

a) feladat

kedvező kimenetelek száma: 260 ügyfélnek van lakásbiztosítása, közülük kell kiválasztani 1 ügyfelet

összes kimenetelek száma: a 600 ügyfél közül választunk ki 1 ügyfelet

$$p=\frac{\binom{260}{1}}{\binom{600}{1}}=\frac{260}{600}=0{,}43$$

b) feladat

kedvező kimenetelek száma: 600- (125+135+195)=145 ügyfélnek nincs egyik biztosítása, közülük kell kiválasztani 1 ügyfelet

összes kimenetelek száma: a 600 ügyfél közül választunk ki 1 ügyfelet

$$p=\frac{\binom{145}{1}}{\binom{600}{1}}=\frac{145}{600}=0{,}24$$

c) feladat

kedvező kimenetelek száma: 135+195= 330 ügyfélnek van csak lakásbiztosítása vagy csak életbiztosítása, közülük kell kiválasztani 1 ügyfelet

összes kimenetelek száma: a 600 ügyfél közül választunk ki 1 ügyfelet

$$p=\frac{\binom{330}{1}}{\binom{600}{1}}=\frac{330}{600}=0{,}55$$

d) feladat

kedvező kimenetelek száma: 135+195+125= 455 ügyfélnek van csak lakásbiztosítása vagy csak életbiztosítása vagy mindkét biztosítással rendelkezik, közülük kell kiválasztani 1 ügyfelet

összes kimenetelek száma: a 600 ügyfél közül választunk ki 1 ügyfelet

p= $\frac{\binom{455}{1}}{\binom{600}{1}} = \frac{455}{600} = 0{,}76$

2. feladat

Egy dobozban 50 fehér és 20 sárga golyó van. A golyók egyforma méretűek. 8 golyót húzunk ki visszatevés nélkül. Mekkora a valószínűsége, hogy

a) a kihúzott golyók között pontosan 3 sárga golyó van?

Megoldás:

kedvező kimenetelek száma: 3 sárga és 5 (8-3) fehér golyó van a kihúzott 8 golyó között

összes kimenetelek száma: 8 golyót húzunk a 70 golyó közül és mindegy a színe

p=$\frac{\binom{20}{3}\binom{50}{5}}{\binom{70}{8}} = 0{,}26$

b) a kihúzott 8 golyó közül legalább 2 sárga?

Megoldás:

kedvező kimenetelek száma: a legalább 2 kifejezés azt jelenti, hogy 2 vagy több golyó lesz sárga, a többi pedig fehér. Ezeknek az eseteknek a számát kell összeadni. Másik lehetőség, hogy az összes kimenetelek számából ki kell vonni a rossz kimenetelek számát (vagyis ha nincs sárga vagy 1 sárga van a kihúzott 8 golyó között). $\binom{70}{8} - (\binom{20}{0}\binom{50}{8} + \binom{20}{1}\binom{50}{7})$

összes kimenetelek száma: 8 golyót húzunk a 70 golyó közül és mindegy a színe $\binom{70}{8}$

p= $\frac{\binom{70}{8}-(\binom{20}{0}\binom{50}{8}+\binom{20}{1}\binom{50}{7})}{\binom{70}{8}}$ =0,73

c) a kihúzott 8 golyó között legfeljebb 2 sárga van?

Megoldás:

kedvező kimenetelek száma: a legfeljebb 2 sárga kifejezés azt jelenti, hogy 0 vagy 1 vagy 2 golyó lesz sárga, a többi pedig fehér. Ezeknek az eseteknek a számát kell összeadni. $\binom{20}{0}\binom{50}{8} + \binom{20}{1}\binom{50}{7} + \binom{20}{2}\binom{50}{6}$

összes kimenetelek száma: 8 golyót húzunk a 70 golyó közül és mindegy a színe $\binom{70}{8}$

$p=\frac{\binom{20}{0}\binom{50}{8}+\binom{20}{1}\binom{50}{7}+\binom{20}{2}\binom{50}{6}}{\binom{70}{8}}=0,588$

A következő feladatokat binomiális eloszlással oldjuk meg.

1. feladat

Egy szabályos pénzérmével 6-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) 5-ször írást dobunk?

Megoldás:

Annak valószínűsége, hogy írást dobunk: p(írás)=$\frac{1}{2}$ (mert a kedvező kimenetel 1 lehet-írás, az összes kimenetel: 2 féle lehet). Annak valószínűsége, hogy fejet dobunk: p(fej)= $\frac{1}{2}$

A keresett valószínűség: p(5 írás, 1 fej)= $\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1\binom{6}{5}=0,094$ Azért szorzunk $\binom{6}{5}$ -tel, mert mindegy, hogy a 6 dobásból melyik 5 lesz írás.

b) 4-szer fejet dobunk?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy írást dobunk: p(írás)=$\frac{1}{2}$ (mert a kedvező kimenetel 1 lehet-írás, az összes kimenetel: 2 féle lehet). Annak valószínűsége, hogy fejet dobunk: p(fej)= $\frac{1}{2}$

A keresett valószínűség: p(4 fej, 2 írás)= $\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\binom{6}{4}=$ 0,234 Azért szorzunk $\binom{6}{4}$ -gyel, mert mindegy, hogy a 6 dobásból melyik 4 lesz fej.

c) az első 4 fej, az utolsó 2 pedig írás?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy írást dobunk: p(írás)=$\frac{1}{2}$ Annak valószínűsége, hogy fejet dobunk: p(fej)= $\frac{1}{2}$

A keresett valószínűség: p(első 4 fej, utolsó 2 írás)= $\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=$ 0,016 Azért nem szorzunk $\binom{6}{4}$-gyel, mert nem mindegy, hogy a 6 dobásból melyik 4 lesz fej. (Az első 4 fej, az utolsó 2 írás)

2. feladat

Egy hamisított pénzérmét feldobva a tapasztalatok alapján $\frac{1}{4}$ valószínűséggel dobunk írást. 10 feldobás esetén mekkora a valószínűsége, hogy

a) minden dobás írás lesz?

Megoldás:

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy írást dobunk: p(írás)=$\frac{1}{4}$ Annak valószínűsége, hogy fejet dobunk: p(fej)= $\frac{3}{4}$ (Hiszen a fej és írás valószínűségének összege 1 lesz.)

A keresett valószínűség: p(mind a 10 írás)= $\left(\frac{1}{4}\right)^{10} =$ 9,53·10^{-7}

b) hogy 3 írás és 7 fej lesz?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy írást dobunk: p(írás)=$\frac{1}{4}$ Annak valószínűsége, hogy fejet dobunk: p(fej)= $\frac{3}{4}$ (Hiszen a fej és írás valószínűségének összege 1 lesz.)

A keresett valószínűség: p(3 írás, 7 fej)= $\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{7}\binom{10}{3} =$ 0,25 Azért szorzunk $\binom{10}{3}$ -gyel, mert mindegy, hogy a 10 dobásból melyik 3 lesz írás.

3. feladat

A tapasztalatok alapján a gyárban készült nápolyik 15 %-a kevesebb krémet tartalmaz. Mekkora a valószínűsége, hogy 10-et kiválasztva

a) mind a 10 megfelelő mennyiségű krémet tartalmaz?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a nápolyik a megfelelő mennyiségű krémet tartalmazzák: p(megfelelő krém)= 0,85; annak valószínűsége, hogy a krém mennyisége kevesebb: p(kevesebb)=0,15. (A két kimenetel valószínűségének összege 1.)

p(mind a 10 megfelelő) = $0{,}85^{10}$ =0,197

b) mind a 10 kevesebb krémet tartalmaz?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a nápolyik a megfelelő mennyiségű krémet tartalmazzák: p(megfelelő krém)= 0,85; annak valószínűsége, hogy a krém mennyisége kevesebb: p(kevesebb)=0,15.

p(mind a 10 kevesebb) = $0{,}15^{10}$ =5·10^{-9}

c) 2 kevesebb krémet tartalmaz?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a nápolyik a megfelelő mennyiségű krémet tartalmazzák: p(megfelelő krém)= 0,85; annak valószínűsége, hogy a krém mennyisége kevesebb: p(kevesebb)=0,15.

p(2kevesebb, 8 megfelelő) = $0{,}15^{2}\ 0{,}85^{8}\binom{10}{2}$ =0,276

Azért szorzunk $\binom{10}{2}$ -vel, mert mindegy, hogy a 10 nápolyiból melyik 2 fog kevesebb krémet tartalmazni.

4. feladat

A ruletten a 37 számközül 18 piros, 18 fekete és 1 zöld színű. 6-szor egymás után pörgetünk. Mekkora annak valószínűsége, hogy

a) az első 3 piros és a második 3 fekete?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy pirosat pörgetünk: p(piros)=$\frac{18}{37}$ Annak valószínűsége, hogy feketét pörgetünk: p(fekete)= $\frac{18}{37}$, annak valószínűsége, hogy zöldet pörgetünk: p(zöld)= $\frac{1}{37}$ (Hiszen a piros , a fekete és a zöld pörgetés valószínűségének összege 1 lesz.)

A keresett valószínűség: p(első 3 piros, következő 3 fekete)= $\left(\frac{18}{37}\right)^3 \left(\frac{18}{37}\right)^3 = \ 0{,}0133$

b) felváltva pörgetünk pirosat és feketét?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy pirosat pörgetünk: p(piros)=$\frac{18}{37}$ Annak valószínűsége, hogy feketét pörgetünk: p(fekete)= $\frac{18}{37}$, annak valószínűsége, hogy zöldet pörgetünk: p(zöld)= $\frac{1}{37}$

Kétféle lehetőség van az első pörgetés vagy piros vagy fekete. Ezért fogunk 2-vel szorozni.

A keresett valószínűség: p(felváltva piros és fekete pörgetés)= $2\left(\frac{18}{37}\right)^3 \left(\frac{18}{37}\right)^3 = \ 0{,}0265$

c) három pörgetés piros, 3 pörgetés fekete?

A keresett valószínűség: p(első 3 piros, következő 3 fekete)= $\left(\frac{18}{37}\right)^3 \left(\frac{18}{37}\right)^3 \binom{6}{3} = \ 0{,}265$

Azért szorzunk $\binom{6}{3}$ -gyel, mert mindegy, hogy a 6 pörgetésből melyik 3 lesz piros.

Visszatevéses mintavétel

1. feladat

Egy dobozban 50 fehér és 20 sárga golyó van. A golyók egyforma méretűek. 8 golyót húzunk ki, de minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót. Mekkora a valószínűsége, hogy

a) a kihúzott golyók között pontosan 3 sárga golyó van?

Megoldás:

Annak valószínűsége, hogy sárgát húzunk: p(sárga)=$\frac{20}{70}$ (mert a kedvező kimenetel 20 lehet- ennyi sárga van, az összes kimenetel: 70 féle lehet –összesen ennyi golyó van). Annak valószínűsége, hogy fehéret húzunk: p(fehér)= $\frac{50}{70}$ (mert a kedvező kimenetel 50 lehet- ennyi fehér van, az összes kimenetel: 70 féle lehet –összesen ennyi golyó van).

A keresett valószínűség: p(3 sárga, 5 fehér)= $\left(\frac{20}{70}\right)^3 \left(\frac{50}{70}\right)^5 \binom{8}{3} = \ 0{,}243$ Azért szorzunk $\binom{8}{3}$ -mal, mert mindegy, hogy a 8 golyóból melyik 3 lesz sárga.

b) legfeljebb 1 sárga golyó lesz?

Megoldás:

Annak valószínűsége, hogy sárgát húzunk: p(sárga)=$\frac{20}{70}$. Annak valószínűsége, hogy fehéret húzunk: p(fehér)= $\frac{50}{70}$.

Legfeljebb egy sárga azt jelenti, hogy 0 sárga és 8 fehér vagy 1 sárga és 7 fehér . Ezek valószínűségeit kell összeadnunk.

A keresett valószínűség: p(0 sárga, 8 fehér)= $\left(\frac{20}{70}\right)^0\left(\frac{50}{70}\right)^8 = 0{,}068$ + p(1 sárga, 7 fehér)= $\left(\frac{20}{70}\right)^1\left(\frac{50}{70}\right)^7\binom{8}{1} = 0{,}217$ Azért szorzunk $\binom{8}{1}$ -mal, mert mindegy, hogy a 8 golyóból melyik lesz sárga.

Tehát p(legfeljebb 1 sárga) =0,285

c) legalább 1 sárga?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy sárgát húzunk: p(sárga)=$\frac{20}{70}$. Annak valószínűsége, hogy fehéret húzunk: p(fehér)= $\frac{50}{70}$.

Legalább egy sárga azt jelenti, hogy 1 sárga lesz vagy több a kihúzott 8 golyó között. Egyszerűbb az említett kimenetelek valószínűségének összeadása helyett az összes kimenetel valószínűségéből (p=1) kivonni a rossz kimenetelek valószínűségét. (rossz eset: 0 sárga és 8 fehér)

p(0 sárga és 8 fehér)= $\left(\frac{20}{70}\right)^0\left(\frac{50}{70}\right)^8 = 0{,}0678$

A keresett valószínűség: p(legalább 1 sárga)= $1-\left(\frac{20}{70}\right)^0\left(\frac{50}{70}\right)^8 = 0{,}932$