Valószínűségszámítás

A klasszikus valószínűségszámítás során az esemény bekövetkezésének valószínűsége a következő képlettel számítható ki (jele p) p=$\frac{az\ esemény\ kedvező\ kimeneteleinek\ száma}{az\ esemény\ összes\ kimenetelének\ száma}$

A valószínűség értéke: $0 \leq p \leq 1$

A fenti képlet csak akkor használható,ha az esemény kimeneteleinek valószínűsége egyenlő.

A biztos esemény valószínűsége 1 lesz, a lehetetlen eseményé pedig 0.

Biztos esemény például annak valószínűsége, hogy dobókockával 6-nál kisebb számot dobunk. Lehetetlen esemény például, hogy dobókockával 7-est dobunk.

1. feladat
   20 tanuló színházba megy. A tanulók színházjegyei egymás mellé szólnak, egy sorba. Mekkora annak valószínűsége, hogy Anna és Péter egymás mellett fognak ülni?

   Megoldás:

Kedvező kimenetelek száma: Össze kell számolni, hogy Anna és Péter hány esetben ülhetnek egymás mellett. Annát és Pétert egy tanulónak tekintjük, mivel egymás mellett fognak ülni. Így 19 tanulót kell leültetni. Ez 19! féleképpen történhet. Kati és Gerda sorrendje 2! lehet. Tehát 19! · 2! ilyen sorrend van.

Összes eset: Semmilyen feltétel nincs, össze kell számolni, hogy 20 tanuló hányféleképpen ülhet le egymás mellé. 20! –féle sorrend létezik.

A megoldás tehát: p=$\frac{19!\cdot 2!}{20!} = 0,1$

2. feladat
   4 pár moziba megy és egy sorban foglalnak helyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy mindenki a saját párja mellett fog ülni?
   Kedvező kimenetelek: mindenki a saját párja mellett ül. A 4 pár sorrendje 4! lehet. Minden pár 2! féleképpen ülhet le (hiszen a párok tagjai helyet is cserélhetnek).
   Tehát a kedvező esetek száma: $4!\cdot (2!)^4 = 384$
   Összes kimenetelek száma: 8 ember tetszőleges sorrendje; 8!

   A megoldás tehát: p=$\frac{4!\cdot 2!^4}{8!} = 0,00952$

3. feladat
   Mekkora annak valószínűsége, hogy a 0;1;2;3;4;5;6;7;8 számjegyek felhasználásával felírt különböző számjegyeket tartalmazó 9 jegyű szám páratlan lesz?
   Kedvező kimenetelek: 9 jegyű, különböző számjegyeket tartalmazó 9 jegyű páratlan számok száma. Az utolsó helyre csak páratlan szám kerülhet (ez e féle: 1;3;5;7). Az első helyre nem kerülhet az utolsó helyre kiválasztott szám és a 0, tehát 7 számjegy közül választhatunk. A 2. számjegy már lehet a 0, de az eddig kiválasztott 2 számjegy nem. Így a második helyre 7 számjegy közül választhatunk. A 3. helyre már csak 6 számjegy közül, a 4. helyre csak 5 és így tovább.
   Tehát $7\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4=141120$ féle ilyen szám létezik.
   Összes eset száma: a fenti számjegyekből felírható különböző számjegyeket tartalmazó szám.
   $8\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=322560$
   A megoldás:
   p=$\frac{141120}{322560} = 0,4375$

4. feladat

Egy futóversenyen 50 induló volt, a befutásoknál nem alakult ki holtverseny. Mekkora annak valószínűsége, hogy Éva első lett a futóversenyen, ha csak a dobogós helyezéseket vesszük figyelembe?

Megoldás:

Kedvező kimenetelek szám: Éva az 1. lesz az első három hely közül. Ennek száma: 1·49·48=2352
(1 - mert csak Éva lehet az első, 49- mert Éván kívül mindenki lehet 2., 48-mert a 48 futó közül lesz valaki a 3.)
A futóverseny dobogós helyezéseinek lehetséges kimenetele, ha nincs holtverseny:
50·49·48=117600
A megoldás: p=$\frac{2353}{117600} = 0{,}02$

5. feladat

Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 0;4;7;8 számjegyek felhasználásával felírt 4 jegyű szám páros, ha a számjegyeket többször is felhasználhatjuk?

Megoldás:

Kedvező kimenetelek száma: a felírt négyjegyű szám páros. 3·4·4·3= 144-féle ilyen szám létezik.
(3- mert 0-val nem kezdődhet szám, a 2. illetve a 3. számjegy mind a 4 számjegy lehet, 3 – mert 3 páros számjegy van a felsorolt számok között.)
Összes kimenetelek száma: négyjegyű számok száma. 3·4·4·4= 192- féle négyjegyű szám létezik.

A megoldás: p=$\frac{144}{192} = 0{,}75$

6. feladat

Egy csomag magyar kártyából 1 lapot választunk ki. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a lap piros lesz.
(A magyar kártyában 4 féle szín van: 8 zöld, 8 makk, 8 piros és 8 zöld.)

Megoldás:

Nem számít a sorrend, csak az a fontos, hogy kiválasztjuk-e a lapot vagy sem.
Kedvező kimenetelek száma: a kihúzott lap piros. Osszuk 2 csoportra a lapokat: pirosak (8 db) és nem pirosak (32-8=24 db)
A pirosakból kell kiválasztani 1 lapot. $\binom{8}{1} = 8$
Összes kimenetelek száma: a 32 lapból 1-et választunk ki. $\binom{32}{1} = 32$

Tehát p=$\frac{8}{32} = 0{,}25$

7. feladat

Egy csomag magyar kártyából 6 lapot választunk ki.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan 4 piros van közte?

Megoldás:

Kedvező kimenetelek száma: a 6 lap között 4 piros lesz. Osszuk 2 csoportra a lapokat: pirosak (8 db) és nem pirosak (32-8=24 db)
A pirosakból kell kiválasztani 4 lapot, a nem pirosakból pedig 2 lapot. $\binom{8}{4}\binom{24}{2} = 19320$ féle módon választhatjuk ki a 4 piros és 2 nem piros lapot.

Összes kimenetelek száma: 32 lap közül 6 lap kiválasztása. Ez $\binom{32}{6}$ féle módon lehet kiválasztani 32 lapból 6 lapot.

Tehát a megoldás: p=$\frac{19320}{906192} = 0{,}021$

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott 6 lap között egy piros sem lesz?

Megoldás:

Kedvező kimenetelek száma: a 6 lap között nem lesz piros. Osszuk 2 csoportra a lapokat: pirosak (8 db) és nem pirosak (32-8=24 db)
A pirosakból nem kell választani , a nem pirosakból pedig 6 lapot. $\binom{24}{6} = 134596$ féle módon választhatjuk ki a 6 nem piros lapot.
Összes kimenetelek száma: 32 lap közül 6 lap kiválasztása. Ez $\binom{32}{6}$ féle módon lehet kiválasztani 32 lapból 6 lapot.

Tehát a megoldás: p=$\frac{134596}{906192} = 0{,}149$

c) Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott 6 lap között legfeljebb két piros lesz?

Megoldás:

Kedvező kimenetelek száma: Ismét 2 csoportra osztjuk a paklit: 8 db piros és 32-8=24 nem piros. A legfeljebb 2 piros azt jelenti, hogy lehet a 6 lap között 0 piros, 1 piros vagy 2 piros. S ezeket a különböző eseteket külön-külön kiszámoljuk, majd összeadjuk.

A 8 pirosból választunk 0 db-ot, a 24 nem pirosból pedig 6 db-ot: $\binom{8}{0}\binom{24}{6} = 134596$ féle módon választhatjuk ki 6 lapot, melyben nem lesz piros.

1 piros és 5 nem piros: $\binom{8}{1}\binom{24}{5} = 340032$

2 piros és 4 nem piros: $\binom{8}{2}\binom{24}{4}$ =297528

A fenti 3 féle esetet összeadva, a megoldás tehát: $\binom{8}{0}\binom{24}{6} + \binom{8}{1}\binom{24}{5} + \binom{8}{2}\binom{24}{4}$ =772156

Összes kimenetelek száma: 6 lap kiválasztása a 32 lap közül. Ez $\binom{32}{6}$ féle módon lehet kiválasztani 32 lapból 6 lapot.

Tehát a megoldás: p=$\frac{772156}{906192} = 0{,}852$

d) Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott 6 lap között legalább kettő piros lesz?
Megoldás:

Kedvező kimenetelek száma: Ismét 2 csoportra osztjuk a paklit: 8 db piros és 32-8=24 nem piros. A legalább 2 piros azt jelenti, hogy lehet a 6 lap között 6 piros, 5 piros, 4 piros, 3 piros, 2 piros van . S ezeket a különböző eseteket külön-külön kiszámoljuk, majd összeadjuk. De helyette kiszámolhatjuk a rossz (nem jó) eseteket is: a 6 között 0 piros, 1 piros van, s ezt kivonjuk az összes esetből.

A 8 pirosból választunk 0 db-ot, a 24 nem pirosból pedig 6 db-ot: $\binom{8}{0}\binom{24}{6} = 134596$ féle módon választhatjuk ki 6 lapot, melyben nem lesz piros.

1 piros és 5 nem piros: $\binom{8}{1}\binom{24}{5} = 340032$

A fenti féle esetet összeadva, és kivonva az összes esetből: a megoldás tehát: $\binom{32}{6}$ - ($\binom{8}{0}\binom{24}{6}$ + $\binom{8}{1}\binom{24}{5}$) =431564

Összes kimenetelek száma: 6 lap kiválasztása a 32 lap közül. Ez $\binom{32}{6}$ féle módon lehet kiválasztani 32 lapból 6 lapot.

Tehát a megoldás: p=$\frac{431564}{906192} = 0{,}476$

8. feladat

Egy urnában 6 fekete és 8 piros golyó van. Egymás után kiválasztunk 2 golyót. A golyókat kihúzás után NEM tesszük vissza. Mekkora a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók egyszínűek lesznek?

Megoldás:

Kedvező esetek száma: mindkét golyó fekete vagy mindkét golyó piros. A kétféle lehetőségek számát össze kell adni.

$\binom{6}{2}$ + $\binom{8}{2}$ = 43

Összes kimenetelek száma: a 14 (6+8) golyóból kiválasztunk 2 golyót. $\binom{14}{2} = 91$

Tehát a megoldás: p=$\frac{43}{91} = 0{,}473$

9. feladat

Egy szabályos dobókockát feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy prímszámot dobunk?

Megoldás:

Kedvező kimenetelek száma: prímszám dobása. 3 ilyen számot lehet dobni : 2; 3; 5.

Összes kimenetelek száma: 6 féle végeredménye lehet a dobókocka feldobásának.

Tehát a megoldás: p= $\frac{3}{6} = 0{,}5$

10. feladat

Egy szabályos dobókockát kétszer egymás után feldobunk.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 5?

Megoldás:

Kedvező kimenetelek száma: a dobott pontok összege 5. 2 dobás után dobókockával 5-öt a következő módon lehet dobni: 1+4; 4+1; 2+3; 3+2. Tehát 4 féle módon.

Összes kimenetelek száma: 2 dobókockával dobunk és mindegy a dobott pontok összege. Ezt a következő táblázat alapján számoljuk össze: 36 féle kimenetele lehet összesen.

egyik kocka → másik kocka ↓	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tehát: p= $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számokat egymás után leírva olyan kétjegyű számot kapunk, mely osztható 5-tel?

Megoldás:
Kedvező kimenetelek száma: a kétjegyű szám 5-tel osztható lesz. Egy szám akkor osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik. Dobásaink a következők lehetnek: 15;25; 35;45;55;65. Ez 6- féle lehet.
Összes kimenetelek száma: az összes leírt kétjegyű szám kimenetele. Ez 36 –féle lehet.

egyik kocka → másik kocka ↓	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Tehát a megoldás : p= $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számokat egymás után leírva olyan kétjegyű számot kapunk, mely legalább 56?

Megoldás:
Kedvező kimenetelek száma: a leírt kétjegyű szám 56 vagy ennél nagyobb.
A táblázat alapján a kedvező kimenetelek száma 7.
Összes kimenetelek száma: az összes leírt kétjegyű szám.
A táblázat alapján 36 –féle lehet.

Tehát a megoldás : p= $\frac{7}{36}$