

KOMBINATORIKA II.

1. feladat

Egy 32 fős osztályban 4 könyvet sorsolnak ki. Hányféle lehet a sorsolás kimenetele, ha
a) egy tanuló csak egy könyvet kaphat és a könyvek különbözőek?

Megoldás: Számít a sorrend, hiszen nem mindegy, hogy ki melyik könyvet kapja.

	1. könyv	2.könyv	3.könyv	4.könyv
lehetőség	32 tanuló	31 tanuló	30 tanuló	29 tanuló

Tehát a könyvek sorsolása $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24165120$ féle módon lehetséges.

b) egy tanuló több könyvet is kaphat és a könyvek különbözőek?

Megoldás: Számít a sorrend, hiszen nem mindegy, hogy ki melyik könyvet kapja. De minden könyvet 32 tanuló között sorsolnak ki. mert egy tanuló több könyvet is kaphat.

	2. könyv	2.könyv	3.könyv	4.könyv
lehetőség	32 tanuló	32 tanuló	32 tanuló	32 tanuló

Tehát a könyvek sorsolása $32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 32^5 = 33554432$ féle módon lehetséges.

c) egy tanuló csak egy könyvet kaphat és a könyvek egyformák?

Megoldás: Nem számít a sorrend, hiszen a könyvek egyformák. És egy tanuló csak egy könyvet kaphat.

Tehát a 32 tanulóból 4 tanulót kell kiválasztani: $\binom{32}{4} = 35960$ módon alakulhat a sorsolás.

2. feladat

Egy 30 elemű halmaznak hány 3 elemű részhalmaza van?

Megoldás: a 30 elemből kell kiválasztani 3 elemet. Nem számít a sorrend, csak az a fontos, hogy kiválasztjuk-e az elemet vagy sem.

$\binom{30}{3} = 4060$ db 3 elemű részhalmaz van.

3. feladat

Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 6 lapot?

Megoldás: Nem számít a sorrend, csak az a fontos, hogy kiválasztjuk-e a lapot vagy sem.

$\binom{32}{6} = 906192$ féle módon választhatjuk ki a 6 lapot.

4. feladat

Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 6 lapot úgy, hogy 2 piros legyen közte?

(A magyar kártyában 4 féle szín van: 8 zöld, 8 makk, 8 piros és 8 zöld.)

Megoldás: Nem számít a sorrend, csak az a fontos, hogy kiválasztjuk-e a lapot vagy sem.

Osszuk 2 csoportra a lapokat: pirosak (8 db) és nem pirosak (32-8=24 db)

A pirosakból kell kiválasztani 2 lapot, a nem pirosakból pedig 4 lapot. $\binom{8}{2}\binom{24}{4} = 297528$ féle módon választhatjuk ki a 2 piros és 4 nem piros lapot.

5. feladat

Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 6 lapot úgy, hogy

a) pontosan 1 király legyen benne?

(A magyar kártyában 4 féle szín van: 8 zöld, 8 makk, 8 piros és 8 zöld. Minden színből van király, tehát 4 király van összesen egy pakliban.)

Megoldás: Ismét 2 csoportra osztjuk a paklit: 4 db király és 32-4=28 nem király

A 4 királyból választunk 1 db-ot, a 28 nem királyból pedig 5 db-ot: $\binom{4}{1}\binom{28}{5} = 393120$ féle módon választhatjuk ki az 1 király és 5 nem királyt.

b) ne legyen benne király

Megoldás: Ismét 2 csoportra osztjuk a paklit: 4 db király és 32-4=28 nem király

A 4 királyból választunk 0 db-ot, a 28 nem királyból pedig 6 db-ot: $\binom{4}{0}\binom{28}{6} = 376740$ féle módon választhatjuk ki 6 lapot, melyben nem lesz király.

c) legfeljebb 3 király legyen benne

1.megoldás: Ismét 2 csoportra osztjuk a paklit: 4 db király és 32-4=28 nem király. A legfeljebb 3 király azt jelenti, hogy lehet a 6 lap között 0 király, 1 király, 2 király vagy 3 király. S ezeket a különböző eseteket külön-külön kiszámoljuk, majd összeadjuk.

A 4 királyból választunk 0 db-ot, a 28 nem királyból pedig 6 db-ot: $\binom{4}{0}\binom{28}{6} = 376740$ féle módon választhatjuk ki 6 lapot, melyben nem lesz király.

1 király és 5 nem király: $\binom{4}{1}\binom{28}{5} = 393120$

2 király és 4 nem király: $\binom{4}{2}\binom{28}{4} = 122850$

3 király és 3 nem király: $\binom{4}{3}\binom{28}{3} = 13104$

A fenti 4 féle esetet összeadva, a megoldás tehát: $\binom{4}{0}\binom{28}{6} + \binom{4}{1}\binom{28}{5} + \binom{4}{2}\binom{28}{4} + \binom{4}{3}\binom{28}{3} = 529074$

2.megoldás: Ismét 2 csoportra osztjuk a paklit: 4 db király és 32-4=28 nem király. Kiszámoljuk a nem lehetséges eseteket és kivonjuk az összes esetből.

Összes eset: 32 lapból kiválasztunk 6 lapot, ez $\binom{32}{6}$ féleképpen lehetséges.

A nem lehetséges eset (a legfeljebb 3 király esetén nem lehet a kihúzott lapok között 4 király): 4 király és 2 nem király: $\binom{4}{4}\binom{28}{2}=378$

A megoldás tehát: $\binom{32}{6} - \binom{4}{4}\binom{28}{2} = 905814$

d) legyen benne király

1.megoldás: Ismét 2 csoportra osztjuk a paklit: 4 db király és $32-4=28$ nem király. A legyen benne király azt jelenti, hogy lehet a 6 lap között 1 király, 2 király, 3 király vagy 4 király van. S ezeket a különböző eseteket külön-külön kiszámoljuk, majd összeadjuk.

A 4 királyból választunk 4 db-ot, a 28 nem királyból pedig 2 db-ot: $\binom{4}{4}\binom{28}{2} = 378$ féle módon választhatjuk ki 6 lapot, melyben 4 király lesz.

1 király és 5 nem király: $\binom{4}{1}\binom{28}{5} = 393120$

2 király és 4 nem király: $\binom{4}{2}\binom{28}{4} = 122850$

3 király és 3 nem király: $\binom{4}{3}\binom{28}{3} = 13104$

A fenti 4 féle esetet összeadva, a megoldás tehát: $\binom{4}{4}\binom{28}{2} + \binom{4}{1}\binom{28}{5} + \binom{4}{2}\binom{28}{4} + \binom{4}{3}\binom{28}{3} = 529452$

2.megoldás: Ismét 2 csoportra osztjuk a paklit: 4 db király és $32-4=28$ nem király. Kiszámoljuk a nem lehetséges eseteket és kivonjuk az összes esetből.

Összes eset: 32 lapból kiválasztunk 6 lapot, ez $\binom{32}{6}$ féleképpen lehetséges.

A nem lehetséges eset (legyen a 6 lap között király esetén az, ha nincs király a 6 lap között): 0 király és 6 nem király: $\binom{4}{0}\binom{28}{6} = 376740$

A megoldás tehát: $\binom{32}{6} - \binom{4}{0}\binom{28}{6} = 529452$

6. feladat

Egy magyar kártyából hányféleképpen lehet kiosztani az összes lapot 4 játékosnak?

Megoldás: Az első játékos a 32 lapból 8 lapot kap, a sorrend nem számít (mindegy, hogy elsőnek vagy 8.-nak kapja meg a lapot, csak az számít, hogy megkapja-e): $\binom{32}{8}$

A 2. játékos már csak $32-8=24$ lapból kap 8-at. A sorrend most sem számít: $\binom{24}{8}$

A 3. játékos már csak $24-8=16$ lapból kap 8 lapot: $\binom{16}{8}$

A 4. játékos pedig megkapja a maradék 8 lapot.

A megoldás tehát: $\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}$

7. feladat

Hányféleképpen lehet kitölteni a skandináv lottót? (35 szám közül kell 7 számot megjelölni, kiválasztani.)

Megoldás:

Mindegy hogyan töltjük ki a lottót, semmilyen feltétel nincs. Vagyis a 35 számból kell kiválasztani 7 számot, a számok megjelölési sorrendje nem számít.

Tehát $\binom{35}{7} = 6724520$ féle módon lehet kitölteni a skandináv lottót.

8. feladat

Hányféleképpen lehet kitölteni az ötös lottót úgy, hogy (90 szám közül kell 5 számot megjelölni, kiválasztani.)

a) ne találjunk el egyetlen számot sem?

Megoldás:

Ismét 2 részre osztjuk a számokat: nyertes – 5 db ilyen szám van és nem nyertes szám
- 85 ilyen szám van.

A feladatban nem számít a sorrend, hiszen az a lényeg, hogy egy számot eltalálunk vagy sem. Mindegy, hogy hányadiknak húzták ki. A nyertes számokból nem választunk ki egyet sem, míg a nem nyertes számokból 5 számot választunk.

A megoldás: $\binom{5}{0} \cdot \binom{85}{5} = 32801517$

b) 4 találatosunk legyen ?

Ismét 2 részre osztjuk a számokat: nyertes – 5 db ilyen szám van és nem nyertes szám
- 85 ilyen szám van.

A feladatban nem számít a sorrend, hiszen az a lényeg, hogy egy számot eltalálunk vagy sem. A nyertes számokból választunk ki négyet, míg a nem nyertes számokból egy számot választunk.

A megoldás: $\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} = 425$

c) nyertes szelvényünk legyen?

Megoldás: A lottón akkor kapunk pénzt, ha legalább 2 találatosunk van.

I. megoldás: Ismét 2 csoportra osztjuk a számokat: 5 nyertes szám 90-5=85 nem nyertes szám. A legalább 2 találatos azt jelenti, hogy lehet kettőtálatos, háromtalálatos, négytalálatos illetve öttalálatos. S ezeket a különböző eseteket külön-külön kiszámoljuk, majd összeadjuk.

A kéttalálatos lottó esetében 2 számot eltalálunk 3-at pedig nem. 2 db-ot választunk a nyertes számokból, a 85 nem nyertesből pedig 3 db-ot: $\binom{5}{2} \binom{85}{3} = 987700$ db ilyen kitöltés lehet

háromtalálatos: 3 nyertes szám és 2 nem nyertes szám: $\binom{5}{3} \binom{85}{2} = 35700$ db ilyen kitöltés lehet

négytalálatos: 4 nyertes szám és 1 nem nyertes számot választunk: $\binom{5}{4} \binom{85}{1} = 425$ db ilyen lottó lehet

öttlalátos: 5 nyertes számunk van és nem nyertesből egy sincs $\binom{5}{5}\binom{85}{0} = 1$ db ilyen kitöltés lehet

A fenti 4 féle esetet összeadva, a megoldás tehát: $\binom{5}{2}\binom{85}{3} + \binom{5}{3}\binom{85}{2} + \binom{5}{4}\binom{85}{1} + \binom{5}{5}\binom{85}{0} = 1023826$

2.megoldás: Ismét 2 csoportra osztjuk a számokat: 5 db nyertes és 85 db nem nyertes. Kiszámoljuk a nem lehetséges eseteket és kivonjuk az összes esetből.

Összes eset: 90 számból kiválasztunk 5 számot, mindegy, hogy van-e benne nyertes szám vagy sincs. Ez $\binom{90}{5}$ féleképpen lehetséges.

A nem lehetséges eset, ha nincs nyertes számunk vagy csak egy számot találtunk el az 5 nyertes szám közül.

egyttlalátos: 1 nyertes szám és 4 nem nyertes szám: $\binom{5}{1}\binom{85}{4} =$ db ilyen kitöltés lehet

nullatlalátos: 0 nyertes szám és 5 nem nyertes szám: $\binom{5}{0}\binom{85}{5} =$ db ilyen kitöltés lehet

A rossz esetek száma: $\binom{5}{1}\binom{85}{4} + \binom{5}{0}\binom{85}{5} = 10123925 + 32801517 = 42925442$

A megoldás tehát: $\binom{90}{5} - (\binom{5}{1}\binom{85}{4} + \binom{5}{0}\binom{85}{5}) = 1023826$